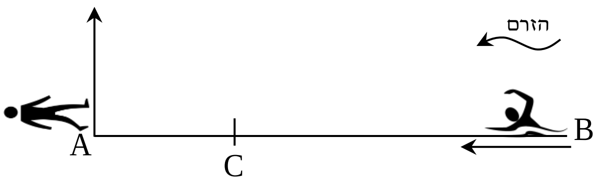
<u>מבחן מתכונת 3 – תשפ"א</u>

<u>שאלון 035581</u>

<u>חומר עזר מותר בשימוש</u>: מחשבון (לא גרפי), דפי נוסחאות מצורפים.
<u>משך המבחן</u>: ארבע שעות ו-23 דק'.
<u>מבנה השאלון</u>: במבחן 8 שאלות, עליך לענות על 4 שאלות, לבחירתך.
אם תענה על יותר מ-4 שאלות, תיבדקנה רק ה-4 השאלות הראשונות שבמחברתך!
<u>מפתח ההערכה</u>: ניקוד שווה לכל שאלה. תשובות ללא דרך (חישוב/הסבר) לא תקבלנה ניקוד.
<u>הבהרות</u>: שאלות המבחן מנוסחות בלשון זכר מטעמי נוחות, אך מופנות לנבחנות ולנבחנים כאחד.
כאשר כתוב למצוא "נקודות" או "פתרונות" <u>ברבים</u>, ייתכן שתהיה תשובה אחת (או פחות).

<u>פרק א'</u> – אלגברה ובעיות מילוליות, סדרות, הסתברות

1. הנקודה A נמצאת על שפך נהר. הולך רגל יצא מנקודה A וצעד צפונה במהירות קבועה. באותו הזמן יצא שחיין מנקודה B, הנמצאת במרחק של 7 ק"מ מזרחית לנקודה A, ושחה עם הזרם במהירות קבועה לעבר הנקודה A. מהירות הזרם בנהר היא 2 קמ"ש.



כאשר הגיע השחיין לנקודה C, הנמצאת במרחק 3 ק"מ מ-A, היה המרחק בין השחיין להולך הרגל 5 ק"מ. השחיין הגיע לנקודה A וחזר מיד לשחות לכיוון הנקודה B.

כאשר הגיע שוב השחיין לנקודה C, היה המרחק בינו לבין הולך הרגל $\sqrt{265}$ ק"מ.

א. **(1)** מה היה המרחק בין השחיין להולך הרגל כאשר השחיין הגיע לנקודה A?
(2) מצא את מהירות השחייה העצמית (במים עומדים) של השחיין.

ב. השחיין המשיך לשחות לעבר הנקודה B בזמן שהולך הרגל המשיך את דרכו צפונה. לאחר t שעות מרגע שהשחיין הגיע לנקודה C בדרכו חזרה, הפסיק הזרם בנהר. מרגע זה השחיין המשיך לשחות לעבר הנקודה B במהירותו העצמית. באותו רגע שבו הפסיק הזרם בנהר, עלה הולך הרגל על אופנוע ים ורכב לעבר הנקודה B בקו ישר במהירות 75 קמ"ש. השחיין ואופנוע הים הגיעו לנקודה B באותו הרגע. מצא את t.

2. סדרה A מוגדרת לכל n טבעי על ידי הסכום: $S_{n+1}=-\frac{1}{8}S_n+12$. כמו כן נתון כי $a_1=12$.

א. הוכח כי הסדרה הנתונה היא הנדסית אינסופית מתכנסת, ומצא את מנתה.

ב. נתונה סדרה הנדסית חדשה B: $b_1, b_2, b_3, \dots$ שמנתה q מקיימת: $\frac{1}{8}<|q|<1$.

שתי הסדרות A ו-B מקיימות: $\frac{a_1+a_2+a_3+\dots}{b_1+b_2+b_3+\dots}=\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}+\dots$. מצא את q. (שתי אפשרויות).

<u>שים לב: המשך השאלה בעמוד הבא >></u>

ת.ד 1570 רמת גן, 5211501 ◄ טל: 03-3027272 ◄ דוא"ל: yuni@yuni.co.il ◄ ווטסאפ: 052-3003770 ◄ פקס: 03-5351571
www.yuni.co.il

ג. נתונה סדרה C שאיברה הכללי הוא: $C_n = \frac{1}{b_n}$.

a_k ו- a_p הם שני איברים (לא בהכרח עוקבים) בסדרה A, כך ש: $k < p$. ידוע כי בסדרה C <u>לא קיים</u> איבר c_n המקיים: $a_k \le c_n \le a_p$.

מצא את תחום הערכים האפשריים של b_1. (הבדל בין שני ערכי q שמצאת בסעיף ב').

3. ישנם שני סוגים של שוקולד: שוקולד מריר ושוקולד חלב. בקרב כל הילדים בעיר, ההסתברות שילד יאהב שוקולד מריר, אם ידוע שהוא אוהב שוקולד חלב, היא $\frac{5}{6}$. ההסתברות שהוא לא יאהב שוקולד חלב, בהינתן שהוא אוהב שוקולד מריר, היא $\frac{3}{8}$.

א. מצא פי כמה גדולה ההסתברות שהוא יאהב את השוקולד המריר מההסתברות שהוא יאהב את שוקולד החלב.

ב. ידוע כי ההסתברות שהילד לא יאהב את שוקולד החלב גדולה פי 2 מההסתברות שהוא לא יאהב את השוקולד המריר. חשב את ההסתברות שהילד יאהב לפחות אחד משני סוגי השוקולד.

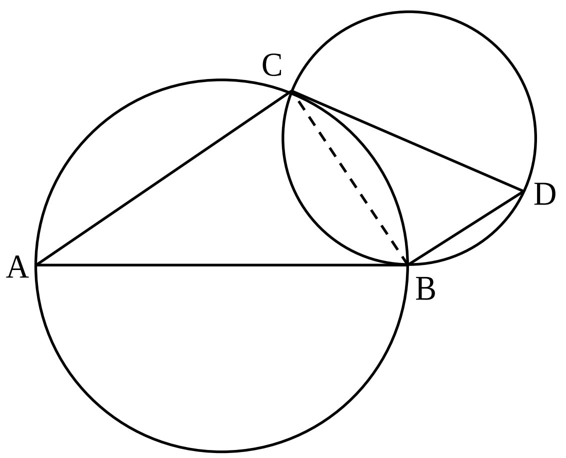
ג. שני ילדים מאותה העיר טועמים את שני סוגי השוקולד. מה ההסתברות שלפחות אחד משני הילדים מהם יאהב לפחות אחד משני סוגי השוקולד.

ד. בוחרים 3 ילדים מהעיר שאוהבים לפחות אחד משני סוגי השוקולד. נותנים לכל אחד לבחור בעיניים עצומות שוקולד אחד מבין 2 שוקולדים: מריר וחלב. מה ההסתברות שרובם יבחרו שוקולד שהם לא אוהבים?

<u>פרק ב'</u> – גיאומטריה וטריגונומטריה במישור

4. שני מעגלים נחתכים בנקודות C ו- B. הנקודות A ו- D מונחות על היקפי שני המעגלים, כמתואר בציור.

CD משיק למעגל אחד, ו AB משיק למעגל השני (ראה שרטוט).



א. הוכח: $AC \parallel BD$.

ידוע בנוסף כי קטע המרכזים של המעגלים מקביל למיתר AC.

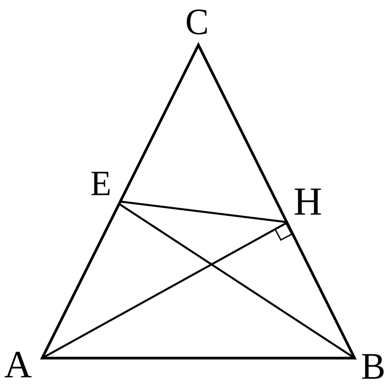
ב. הוכח: המיתרים AB ו- CD הם קטרים במעגלים.

ג. נתון: $AB = 8$, $CD = 6$.

(1) חשב את אורך המיתר BD.

(2) ממשיכים את הקטרים AB ו- CD מהכיוון של B ו- D, בהתאמה. המשכי הקטעים נחתכים בנקודה E.

חשב את שטח המשולש $\triangle BDE$.



.5 במשולש שווה שוקיים ABC $(AC=CB)$, AH הוא גובה לצלע BC,
ו – BE הוא חוצה זווית $\sphericalangle ABC$.
נתון: $AB=a$, $\sphericalangle CAB=\sphericalangle CBA=\alpha$.

א. הבע באמצעות a ו– α:
(1) את אורך הקטע CE.
(2) את שטח המשולש CHE.

ב. נתון: $AH=BE$. הבע באמצעות a את שטח המשולש CHE.

<u>פרק ג'</u> – חדו"א של פונקציות טריגונומטריות, פולינומים, רציונאליות ושורש ריבועי.

.6 נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$, ופונקציה נוספת: $g(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}}$.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של כל אחת מהפונקציות.
(2) מצא את נקודות החיתוך של כל אחת מהפונקציות עם הצירים.
(3) הראה שלפונקציות תחומי עלייה בלבד.

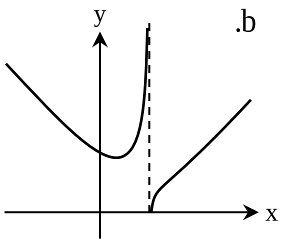
ב. שרטט בשתי מערכות צירים נפרדות את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

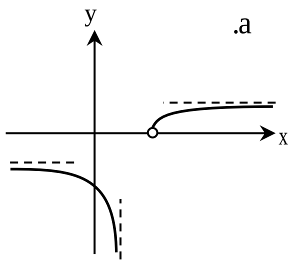
נתונה פונקציה נוספת: $h(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2-3x+2}}$

ג. **(1)** הוכח כי בתחום $x<1$ מתקיים: $h(x)=-\sqrt{\frac{2-x}{1-x}}$.
(2) בהתייחס לתחום בו $h(x)$ מוגדרת, קבע האם מתקיים: $|h'(x)|=f'(x)$. נמק.
(3) שרטט את גרף הפונקציה $h(x)$.

ד. נתונים שלושה תיאורים לפונקציות שונות (i-iii):
i. פונקציית המרחק בין נקודה כלשהי הנמצאת על $h(x)$ לנקודת החיתוך של $f(x)$ עם ציר ה- x.
ii. פונקציית היחס: $y=\frac{f(x)}{h(x)}$.
iii. פונקציית המכפלה: $y=f(x)\cdot h(x)$.

(1) בתחתית השאלה מוצגים שני גרפים (a ו- b). ידוע כי שני הגרפים מתאימים לשניים <u>בדיוק</u> מבין שלוש הפונקציות המתוארות (i-iii). התאם בין הגרף לפונקציה המתאימה. נמק.
(2) שרטט גרף מתאים לפונקציה <u>הנותרת</u>.





.7 נתונה פונקציית הנגזרת: $f'(x)=(ax+2)^2(-4ax-2)$, a פרמטר גדול מ-0.

א. **(1)** מצא את נקודות החיתוך של $f'(x)$ עם הצירים.

(2) מצא את נקודות הקיצון של $f'(x)$ וקבע את סוגן.

(3) שרטט את גרף הפונקציה $f'(x)$.

ב. **(1)** הראה כי השטח הכלוא בין גרף הנגזרת השנייה $f''(x)$ וציר ה-x , בתחום בו מתקיים: $f''(x)\ge 0$, אינו תלוי ב a.

(2) נתון: $\int_{-k}^{k-6} f'''(x)dx=0$. (k פרמטר, $k\ge 6$). חשב את a .

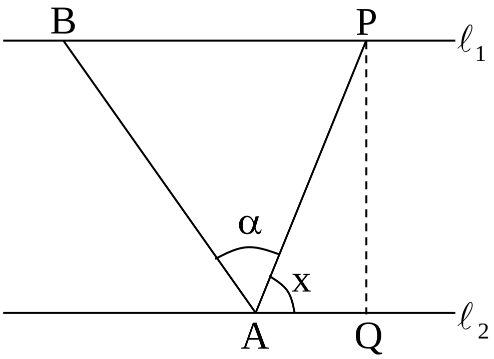
ג. ידוע כי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו $f'(x)$ נחתכים, בין היתר, גם בנקודת המקסימום של גרף הנגזרת $f'(x)$.

(1) מצא את הפונקציה $f(x)$.

(2) שרטט את גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. מצא את תחום ערכי m עבורם הישר: $y=mx+n$ חותך את גרף הנגזרת $f'(x)$ פעם אחת בדיוק, לכל n .
(m , n פרמטרים).

.8 ℓ_1 ו ℓ_2 הם שני ישרים מקבילים שהמרחק ביניהם PQ שווה ל- d ס"מ.
הנקודה P היא נקודה קבועה על הישר ℓ_1 , הנקודה Q נמצאת על הישר ℓ_2 . בוחרים נקודה A על הישר ℓ_2 , ומסמנים: $\sphericalangle PAQ=x$.
קובעים נקודה B על הישר ℓ_1 כך ש: $\sphericalangle PAB=\alpha$. α היא גודל נתון וקבוע, וידוע כי $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. PQ מחוץ למשולש PAB .



א. מכל המשולשים PAB שניתן לבנות באופן שתואר, מצא את השטח המינימלי של המשולש PAB (בטא באמצעות d ו- α).

ב. ידוע כי השטח המינימלי של המשולש שווה ל $0.8d^2$. מצא את זוויות המשולש ששטחו מינימלי.

בהצלחה!

<u>תשובות סופיות</u>

1. **א.** **(1)** 7 קי"מ. **(2)** 4 קמ"ש. **ב.** $\frac{4}{3}$.

2. **א.** הוכחה **ב.** $\frac{1}{4}$ או $-\frac{1}{2}$

ג. עבור: $q=\frac{1}{4}$: $0<b_1<\frac{1}{12}$, $-\frac{2}{3}<b_1<0$, עבור: $q=-\frac{1}{2}$: $0<b_1<\frac{1}{12}$, $-\frac{1}{6}<b_1<0$

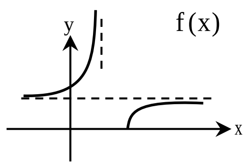
3. **א.** $\frac{4}{3}$. **ב.** 0.9 **ג.** 0.99 . **ד.** $\frac{92}{729}$

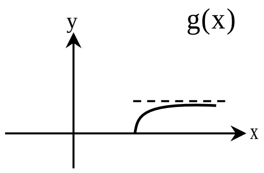
4. **א.** הוכחה **ב.** הוכחה **ג.** 3.6 **ד.** $11\frac{19}{175}$

5. **א.** $\frac{a\sin 0.5\alpha}{2\cos\alpha\sin 1.5\alpha}$ **ב.** $-\frac{a^2\sin 0.5\alpha\sin 4\alpha}{16\cos^2\alpha\sin 1.5\alpha}$ **ג.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$

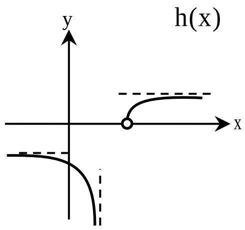
6. **א.(1)** $f(x): x<1,\ x\ge 2$, $g(x): x\ge 2$ **א.(2)** $f(x): (2,0)$, $\left(0,\sqrt{2}\right)$, $g(x): (2,0)$

א.(3) הוכחה **ב.**



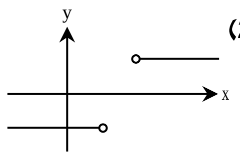


ג.(1) הוכחה **ג(2)** נכון. **ג(3)**

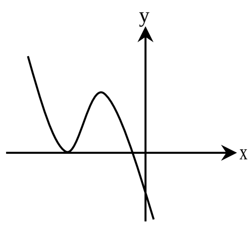


ד.(1) $a\to iii$, $b\to i$

ד.(2)

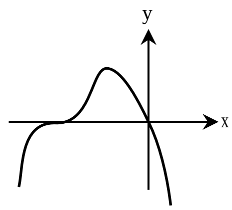


7. **א.(1)** $(0,-8)$, $\left(-\frac{1}{2a},0\right)$, $\left(-\frac{2}{a},0\right)$ **א.(2)** $\min\left(-\frac{2}{a},0\right)$, $\max\left(-\frac{1}{a},2\right)$, **א.(3)**



ב.(1) הוכחה **ב(2)** $a=0.5$ **ג. (1)** $f(x)=-\frac{x^4}{8}-1.5x^3-6x^2-8x$

ג.(2)



ד. $m\ge 1.5$

8. **א.** $\frac{d^2\sin\alpha}{2\cos^2 0.5\alpha}$ **ב.** $51.34°$, $51.34°$, $77.32°$