

המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

מבחן מתכונת 2 – תש"ף

שאלון 035582

חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון (לא גרפי), דפי נוסחאות מצורפים.

משך המבחן: שעתיים ורבע

מבנה השאלון: במבחן 2 פרקים.

יש לענות על 3 שאלות מתוך 5. הניקוד על כל שאלה זהה.

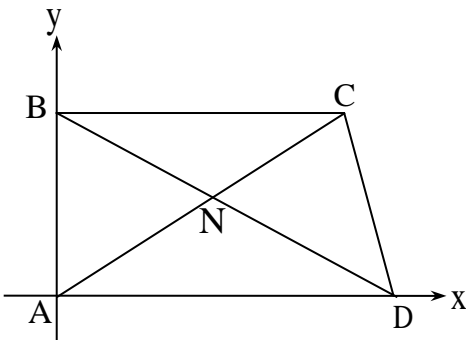
אם תענה על יותר שאלות, תבדקנה 3 השאלות הראשונות שבמחברתך.

תשובות ללא דרך (חישוב/הסבר) לא תקבלנה ניקוד.

שאלות המבחן מנוסחות בלשון זכר מטעמי נוחות, אך מופנות לבנות ולבנים כאחד.

הבהרה: כאשר כתוב למצוא "נקודות" או "פתרונות" ברבים, ייתכן שתהיה תשובה אחת (או פחות)

חלק א' – וקטורים, טריגונומטריה במרחב, גיאומטריה אנליטית ומספרים מרוכבים



1. נתון טרפז $ABCD$, $(BC \parallel AD)$, הצלע AB מונחת על ציר ה- y והצלע

AD מונחת על ציר ה- x . הקודקוד C נמצא ברביע הראשון.

נתון: $AB = 4$, $BC \cdot AD = 16$, האלכסונים AC ו- BD נפגשים בנקודה N .

א. מצא ואפיין את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות N הנוצרות באופן זה.

נתונה פרבולה קנונית $y^2 = 2px$ שמוקדה F הוא אמצע הקטע AD .

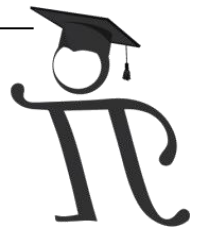
הפרבולה חותכת את הצלע BC בנקודה E .

ב. הוכח כי המשיק לפרבולה בנקודה E מקביל לאלכסון AC .

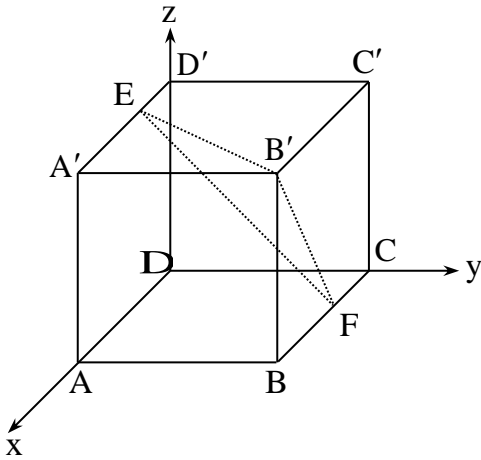
ג. הקטע EF מחלק את הטרפז $ABCD$ לשני מרובעים. מצא את היחס בין שטחי שני מרובעים אלה.

ד. הוכח או הפרך: הנקודה N נמצאת על הקטע EF . הסבר בפירוט.

ה. נתון כי אורך הקטע EN הוא 5. מצא את משוואת הפרבולה.



המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה



2. נתונה קובייה $ABCD A'B'C'D'$ המונחת במערכת צירים כמתואר בציור.

הקודקוד D נמצא בראשית הצירים. אורך מקצוע הקובייה הוא a .

הנקודה E נמצאת על המקצוע $A'D'$, ו- F היא נקודה על המקצוע BC

$$\text{כך ש- } BF = \frac{2}{3}BC \text{ ו- } A'E = \frac{2}{3}A'D'$$

המשך האנך היוצא מנקודה C' למישור $EB'F$ חותך את מישור הבסיס $ABCD$ בנקודה G .

א. הבע באמצעות a (במידת הצורך) את השיעורים של הנקודה G .

ב. המישור עליו נמצא המשולש $EB'F$ חותך את ציר ה- x בנקודה Q .

הבע באמצעות a (במידת הצורך) את השיעורים של הנקודה Q .

ג. מרחק הנקודה G מהמישור $EB'F$ הוא $\frac{22}{\sqrt{17}}$. חשב את נפח הפירמידה $GDCC'D'$.

3. המספר המרוכב $z = x + iy$ (x ו- y ממשיים) מקיים את המשוואה: $|z - 12 - 5i| = 3$. ($z \in \mathbb{C}$)

א. מצא ואפיין במישור גאוס את המקום הגיאומטרי שמתואר על ידי המשוואה הנתונה.

ב. מצא את הערך המינימלי ואת הערך המקסימלי של המקום הגיאומטרי שמצאת בסעיף א'.

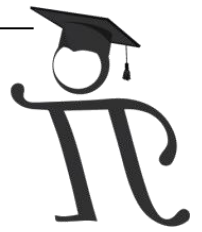
המקום הגיאומטרי $\arg(z - 4) = \frac{\pi}{4}$ חותך את המקום הגיאומטרי שמצאת בסעיף א' בשתי נקודות B ו- C (הנקודה C

נמצאת מימין לנקודה B).

המספרים המרוכבים z_B ו- z_C מיוצגים במישור גאוס על ידי הנקודות B ו- C בהתאמה.

ג. מצא את z_B ואת z_C .

ד. הראה כי $\arg\left(\frac{12 + 5i - z_C}{12 + 5i - z_B}\right) = \frac{3\pi}{2}$.



המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

חלק ב' – חזו"א ואלגברה של פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות, בעיות גדילה ודעיכה

4. נתונה הפונקציה: $f(x) = (\log_3^2 x - 2\log_3 x)^n$, פרמטר שלם וחיובי.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים, במידה וקיימות.

עבור הסעיפים ג-ה' הבחן בין מקרים בהם n זוגי ובין מקרים בהם n אי-זוגי.

ג. מצא את נקודות הקיצון ואת סוגן.

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. נתונה המשוואה: $(\log_3^2 x - 2\log_3 x + 1) \cdot (\log_3^2 x - 2\log_3 x - 1) = -0.5$. מצא, בהסתמך על סעיפים

קודמים, כמה פתרונות למשוואה. נמק תשובתך.

ו. בהינתן כי $n = 3$, מצא את b עבורו ערך האינטגרל: $\int_1^b f(x) dx$ הוא מינימלי.

5. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{x}-1}$

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ה. מצא את האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.

ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

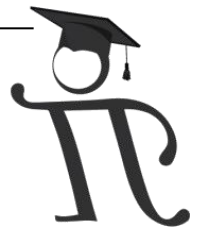
ז. מגדירים פונקציה חדשה: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. שרטט את גרף הפונקציה $g(x)$.

ח. קבע עבור אילו ערכי k למשוואה: $f(x) = g(x) + k$ אין פתרון.

ט. נתונה הטענה הבאה: $\int_1^a \frac{e^x}{2\sqrt{x}-1} dx = \int_3^{a+2} \frac{e^{x+2}}{2\sqrt{x+2}-1} dx$. פרמטר גדול מ-1.

קבע האם הטענה נכונה, שגויה, או שלא ניתן לדעת. נמק את תשובתך.

בהצלחה!



המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

תשובות סופיות

1. א. קשת המעגל $x^2 + (y-2)^2 = 4$ הנמצאת ברביע הראשון ב. הוכחה ג. 1:1

ד. הוכחה ה. $y^2 = 3.2x$

2. א. $G(\frac{3a}{2}, 0, 0)$ ב. $Q(-\frac{a}{3}, 0, 0)$ ג. 32 יח' נפח

3. א. $(x-12)^2 + (y-5)^2 = 9$ ב. מקסי: 8, מיני: 2 ג. $9+5i$, $12+8i$

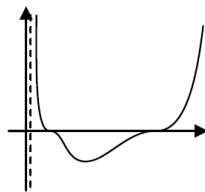
ד. הוכחה

4. א. $x > 0$ ב. $x = 0$

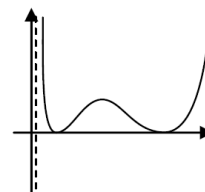
ג. זוגי: $(9,0) \min$, $(3,1) \max$, $(1,0) \min$. אי-זוגי: $(3,-1) \min$

ה. 4 פתרונות ו. $b = 9$

עבור $n = 2k + 1$



ד. עבור $n = 2k$



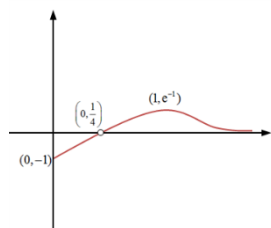
ג. עלייה: $x > 1$, ירידה: $\frac{1}{4} < x < 1$, $0 < x < \frac{1}{4}$

ב. $(1, e) \min$, $(0, -1) \max$

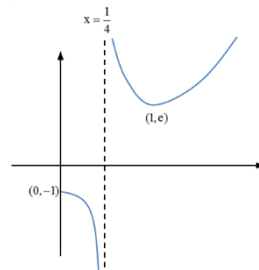
5. א. $0 \leq x < \frac{1}{4}$, $x > \frac{1}{4}$

ד. $(0, -1)$

ו.



ה.



ט. שגויה.

ת. $0 < k < e - \frac{1}{e}$

ז. $0 \leq x < \frac{1}{4}$, $x > \frac{1}{4}$