מבחן מתכונת 2 – תשפ"א

שאלון 035581

חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון (לא גרפי), דפי נוסחאות מצורפים.
משך המבחן: ארבע שעות ו23 דק'.
מבנה השאלון: במבחן 8 שאלות, עליך לענות על 4 שאלות, לבחירתך.
אם תענה על יותר מ-4 שאלות, תיבדקנה רק ה-4 השאלות הראשונות שבמחברתך!
מפתח ההערכה: ניקוד שווה לכל שאלה. תשובות ללא דרך (חישוב/הסבר) לא תקבלנה ניקוד.
הבהרות: שאלות המבחן מנוסחות בלשון זכר מטעמי נוחות, אך מופנות לנבחנות ולנבחנים כאחד.
כאשר כתוב למצוא "נקודות" או "פתרונות" ברבים, ייתכן שתהיה תשובה אחת (או פחות).

פרק א' – אלגברה ובעיות מילוליות, סדרות, הסתברות

1. שתי מכוניות יצאו בו זמנית מעיר A לעיר B, הראשונה במהירות של 80 קמ"ש והשנייה במהירות של 60 קמ"ש. אחרי שעה מיציאתן, יצאה מכונית שלישית מהעיר A לעיר B. המכונית השלישית הגיעה ל-B שעה אחת אחרי שהשיגה את המכונית הראשונה. המכונית השנייה הגיעה ל-B שעתיים אחרי המכונית השלישית.

א. חשב את מהירותה של המכונית השלישית ואת המרחק בין שני הערים.

ב. **(1)** חשב את המרחק שעברה המכונית השלישית מרגע יציאתה עד המקום בו היא השיגה את המכונית השנייה.

(2) חשב את המרחק בין המכונית השנייה והראשונה ברגע בו המכונית השלישית השיגה את המכונית השנייה.

2. נתונה סדרה חשבונית a: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ שאינה קבועה, וכל איבריה שלמים.

נתונה סדרה נוספת b המוגדרת על ידי הנוסחה: $b_p = a_p + a_{n-p+1}$.

א. **(1)** בטא בעזרת איברי הסדרה a את שלושת האיברים הראשונים בסדרה b.

(2) קבע האם הסדרה b עולה, יורדת, קבועה, או שלא ניתן לדעת. נמק.

ב. קבע מה מבין האפשרויות (i)-(iv) ניתן לומר בהכרח (תתכן יותר מאפשרות אחת). נמק.

i. אם n מספר זוגי אז מספר האיברים בסדרה b הוא זוגי.

ii. אם n מספר אי-זוגי אז כל איברי הסדרה b זוגיים.

iii. אם קיים איבר שלילי בסדרה b אז יותר ממחצית מאיברי הסדרה a_n שליליים.

iv. אם קיימים שני איברים עוקבים בסדרה a_n שסכומם שווה ל-b_8, אז n מספר זוגי.

נתון בנוסף הסכום: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$.

ג. הוכח כי מתקיים $2 \cdot S_n = n \cdot b_p$.

ד. נתון: $S_n = 606$, $b_3 = 101$, $a_6 = 49$. מצא את a_1.

3. משלוח של מזון ארוז בארגזים לקראת בדיקת איכות. המזון בארגזים הוא פגום או תקין. ידוע כי אם המזון בארגז כלשהו פגום, אז ההסתברות שהמזון יהיה פגום גם בארגז שייפתח אחריו היא p. כאשר המזון בארגז כלשהו הוא תקין, אז ההסתברות שהמזון יהיה תקין גם בארגז שייפתח אחריו היא $1.5p$.

א. פותחים ארגז ומסתבר שהוא תקין. ממשיכים לפתוח עוד שני ארגזים. נתון כי ההסתברות שהמזון בארגז האחרון יהיה פגום היא 0.15.

(1) חשב את p $(p > 0.4)$.

(2) מה ההסתברות שלפחות באחד הארגזים נמצא מזון פגום.

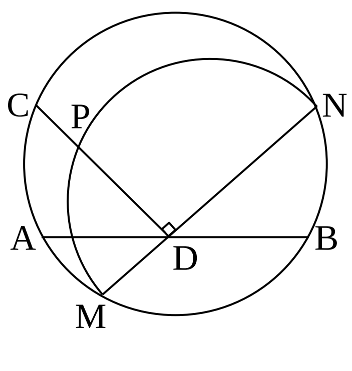
(3) ידוע שלפחות באחד הארגזים נמצא מזון פגום. מה ההסתברות שנמצא רק ארגז אחד שבו מזון פגום?

ב. פותחים ארגז כלשהו. אם נמצא שהמזון בו תקין לא פותחים ארגז נוסף. אם נמצא בו מזון פגום פותחים ארגז נוסף. ידוע כי המזון בארגז הראשון פגום. מה ההסתברות לפתוח ארגז שבו מזון תקין, אם ידוע בנוסף כי לא ייפתחו יותר מ 6 ארגזים בסך הכל (כולל הארגז הראשון שתכולתו ידועה)?

ג. פותחים באקראי ארגז כלשהו ומתברר שהמזון בארגז תקין. פותחים בזה אחר זה 7 ארגזים נוספים. מה ההסתברות שיימצא ביניהם ארגז אחד בדיוק שבו מזון פגום?

<u>פרק ב'</u> – גיאומטריה וטריגונומטריה במישור

4. במעגל שהנקודות C, A, M, B, N על היקפו, המיתר AB נחצה בנקודה D על ידי המיתר MN. על המיתר MN בונים חצי מעגל הנמצא כולו בתוך המעגל הנתון, כאשר MN משמש כקוטרו של המעגל החדש. הנקודה C נמצאת על היקף המעגל הנתון, כך שמתקיים: $CD \perp MN$. הנקודה P נמצאת על הקטע CD ועל קשת חצי המעגל MN.



א. הוכח: $BD = DP$.

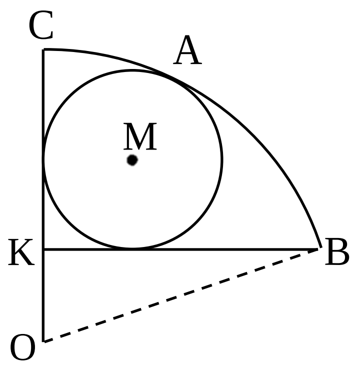
נתון כי הקטע PB חוצה את המיתר MN.

ב. הוכח: PM חוצה את זווית $\measuredangle APD$.

ג. הוכח: $4AD^2 = MN \cdot PB$.

נתון בנוסף כי AN הוא קוטר במעגל הגדול.

ד. הסבר מדוע בהכרח מתקיים: $\measuredangle ANM \neq \measuredangle PBA$.



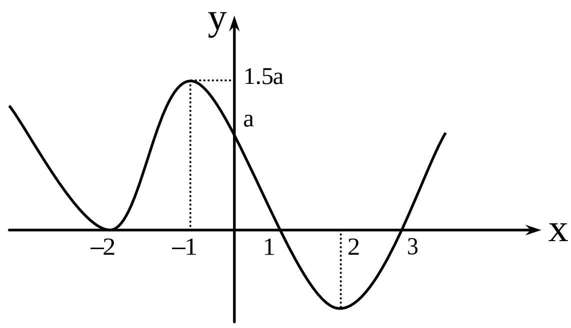
5. נתונה גזרת מעגל שמרכזו O כך ש CB היא קשת במעגל O. הנקודה K מונחת על הרדיוס CO כך שמתקיים: $CO \perp KB$. מעגל שמרכזו M חסום בין הקטעים CK, KB והקשת CB, לה הוא משיק בנקודה A.
נתון: רדיוס המעגל שמרכזו O הוא R, רדיוס המעגל שמרכזו M הוא r, $\sphericalangle KOB = \alpha$.

א. הבע את אורך הקטע MB באמצעות R, r ו- α.
נתון: $R = 7$, $r = 2$.

ב. חשב את אורך הקטע KO.

ג. חשב את שטח המרובע OKMB.

<u>פרק ג'</u> – חדו"א של פונקציות טריגונומטריות, פולינומים, רציונאליות ושורש ריבועי.



6. נתון גרף הפונקציה $f(x)$. הפונקציה $f(x)$ הינה פונקציית פולינום המוגדרת וגזירה לכל x. a הוא פרמטר.

א. בהסתמך על הנתונים שבשרטוט, שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f'(x)$.

הגדירו פונקציה חדשה: $g(x) = \dfrac{f'(x)}{f^3(x)}$.

ב. חקור את הפונקציה $g(x)$ על פי הסעיפים הבאים:

(1) מצא את תחום ההגדרה.

(2) מצא את תחומי החיוביות והשליליות.

(3) הסבר מדוע הישר $x = -2$ הוא אסימפטוטה אנכית לפונקציה.

(4) מצא את כל האסימפטוטות המקבילות לצירים.

(5) ידוע כי לפונקציה $g(x)$ אין נקודות קיצון. שרטט את גרף הפונקציה.

ג. הפונקציה $G(x)$ מקיימת: $G'(x) = g(x)$. לפונקציות $G(x)$ ו- $g(x)$ אותו תחום הגדרה. דרך נקודת המקסימום השמאלית ביותר של הפונקציה $G(x)$ ודרך נקודת החיתוך של הפונקציה $G(x)$ עם ציר ה- y, העבירו ישר ששיפועו m (m פרמטר).

(1) הוכח כי השטח הכלוא על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ושני הצירים שווה ל $-m$.

(2) נתון כי השטח הכלוא על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ושני הצירים שווה ל2.5. מצא את a.

.7 נתונה הפונקציה: $f(x)=\cos^2 x-t\cdot\sin^2 x$, t פרמטר.

א. מצא את שיעורי נקודות הקיצון וקבע את סוגן (הצג פתרון כללי. במידת הצורך הבע באמצעות t). הבדל בין ערכי t שונים.

ב. קבע עבור אילו ערכי t גרף הפונקציה אינו חותך את ציר ה-x.

ג. שרטט שלושה גרפים נפרדים של הפונקציה בתחום: $-\pi\le x\le 2\pi$, עבור כל אחד מערכי t הבאים:

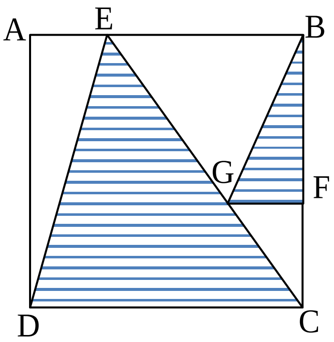
(1) $t>0$ **(2)** $-1<t<0$ **(3)** $t<-1$

ד. עבור התחום: $-k\pi\le x\le (k+1)\pi$ (k שלם וחיובי) מצא לאילו ערכי t הפונקציה חותכת את ציר ה-x מספר אי-זוגי של פעמים. נמק.

ה. נתונה הפונקציה: $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$. ידוע כי המרחק המקסימלי של נקודה על הפונקציה $g(x)$ מציר ה-x הוא 5.

מצא את הפונקציה $g(x)$. נמק.

.8 נתון ריבוע $ABCD$ שאורך צלעו 1 ס"מ. הנקודה F נמצאת על הצלע BC, הנקודה E נמצאת על הצלע AB והנקודה G נמצאת על הצלע EC כך שמתקיים: $GF \parallel AB$, $AE=GF$.



א. חשב את גודל הזווית $\sphericalangle EDC$, עבורה סכום שטחי המשולשים $\triangle EDC$ ו- $\triangle GBF$ הוא מקסימלי.

ב. מצא את הסכום <u>המינימלי</u> של שטחי המשולשים $\triangle EDC$ ו- $\triangle GBF$.

בהצלחה!

אוניברסיטת בר-אילן
מסורת של מצוינות
בשיתוף

המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר
התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

<u>תשובות סופיות</u>

1. **א.** 120 קמ"ש, 360 קמ"ש. **ב. (1)** 120 קמ"ש **(2)** 40 קמ"ש.

2. **א.(1)** $b_1 = a_1 + a_n\ ,\ \ b_2 = a_2 + a_{n-1}\ ,\ b_3 = a_3 + a_{n-2}$ **(2)** קבועה. **ב.** i, ii, iv נכונים.

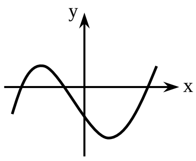
ג. הוכחה **ד.** $a_1 = 34$

3. **א.** **(1)** $p = 0.6$. **(2)** 0.19 **(3)** $\frac{13}{19}$ **ב.** 0.92224 **ג.** 0.19486 .

4. **א.** הוכחה **ב.** הוכחה **ג.** הוכחה **ד.** הוכחה

5. **א.** $\sqrt{2r^2 + R^2\sin^2\alpha - 2Rr\sin\alpha}$ **ב.** 2.58 **ג.** 14.906

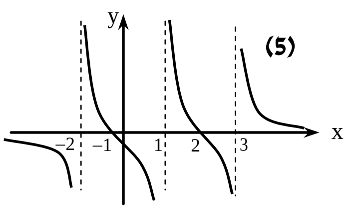
6. **א.(1)**



ב.(1) $x < -2, -2 < x < 1\ ,\ 1 < x < 3\ ,\ x > 3$

(2) חיוביות: $x > 3\ ,\ 1 < x < 2\ ,\ -2 < x < -1$, שליליות: $x < -2\ ,\ -1 < x < 1\ ,\ 2 < x < 3$

(3) הסבר **(4)** $x = -2,\ x = 1,\ x = 3,\ y = 0$ **(5)**



ג.(1) הוכחה **(2)** $a = \frac{1}{3}$

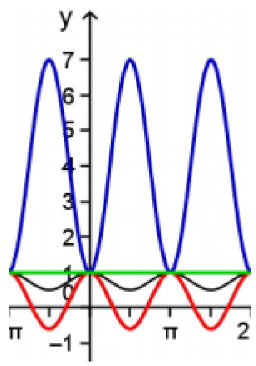
7. **א.** עבור $t > -1$: $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k, -t\right)\min\ ,\ (\pi k, 1)\max$, עבור $t < -1$: $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k, -t\right)\max\ ,\ (\pi k, 1)\min$,

עבור $t = -1$: אין קיצון.

ב. $t < 0$

ג. **(1)** גרף אדום **(2)** גרף שחור **(3)** גרף כחול

ד. $t = 0$ **ה.** $g(x) = \frac{1}{\cos^2 x + 0.2\sin^2 x}$



8. **א.** $73.675°$ **ה.** 0.5 סמ"ר