

המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

מבחן מתכונת 3 – תשפ"א

שאלון 035582

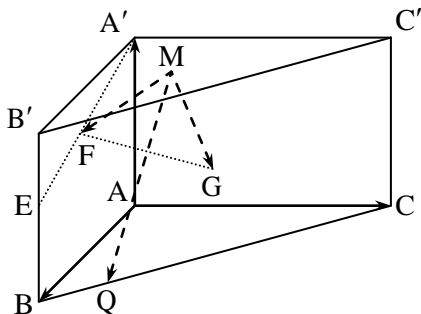
חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון (לא גרפי), דפי נוסחאות מצורפים.
משך המבחן: שעתיים ו-50 דק'.
מבנה השאלון: במבחן 5 שאלות, עליך לענות על 3 שאלות, לבחירתך.
אם תענה על יותר מ-3 שאלות תיבדקנה רק ה-3 השאלות הראשונות שבמחברתך!
מפתח ההערכה: הניקוד על כל השאלות שווה. תשובות ללא דרך (חישוב/הסבר) לא תקבלנה ניקוד.
שאלות המבחן מנוסחות בלשון זכר מטעמי נוחות, אך מופנות לבנות ולבנים כאחד.
הבהרה: כאשר כתוב למצוא "נקודות" או "פתרונות" ברבים, ייתכן שתהיה תשובה אחת (או פחות).

חלק א' – וקטורים, טריגונומטריה במרחב, גיאומטריה אנליטית ומספרים מרוכבים

1. נתון ישר $y = mx$. דרך הנקודות $E(2a, 0)$ ו- $F(0, 3b)$, הנמצאות מחוץ לישר הנתון, מעבירים אנכים לישר זה שחותכים אותו בנקודות A ו-B בהתאמה. $(a, b - 1 - m)$ פרמטרים.
א. הבע באמצעות $a, b - 1 - m$ את שיעורי הנקודות A ו-B.

דרך הנקודה A העבירו ישר המאונך לציר ה-y, ודרך הנקודה B העבירו ישר המאונך לציר ה-x. שני ישרים אלה נפגשים בנקודה P.

- ב. הראה כי המקום הגיאומטרי של אוסף כל הנקודות P הוא קו ישר, ומצא את משוואתו (הבע באמצעות $a - 1 - b$).
ג. הנקודה E היא מוקד של פרבולה קנונית הנמצאת על הכיוון החיובי של ציר ה-x. הנקודה P נמצאת על פרבולה זו. ידוע כי $x_p = 3 \cdot x_E$. מצא את משוואת המקום הגיאומטרי שמצאת בסעיף ב' (מספרי) של אוסף כל הנקודות P.



2. נתונה מנסרה משולשת ישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה התחתון ABC הוא משולש ישר זווית, $\angle A = 90^\circ$. הנקודה M היא נקודת מפגש תיכוני המשולש $A'B'C'$, הנקודה E נמצאת על המקצוע BB' כך ש- $3 \cdot BE = 2BB'$. הנקודה F היא אמצע $A'E$ והנקודה G היא נקודת מפגש האלכסונים של הפאה $BCC'B'$. הנקודה Q נמצאת על המקצוע BC ומקיימת:

$$BQ : BC = 1 : 5. \quad \overline{AA'} = \underline{w}, \quad \overline{AC} = \underline{v}, \quad \overline{AB} = \underline{u}$$

א. הבע את \overline{MF} , \overline{MG} ו- \overline{MQ} באמצעות \underline{u} , \underline{v} ו- \underline{w} .

ב. הראה כי \overline{MQ} נמצא על המישור FMG.

- ג. נתון: $|\underline{u}| = 3$, $|\underline{v}| = 6$, $|\underline{w}| = m$. היעזר במערכת צירים תלת-ממדית שראשיתה בנקודה A והבע באמצעות m את משוואת המישור FMG.

המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

3. הנקודות O, A, P, R, Q הן נקודות במישור גאוס המיוצגות על-ידי המספרים

המרוכבים $z_O = 0, z_A = 1, z_P = 2 + i, z_Q = 1 + 2i$ בהתאמה (ראה סרטוט).

נתון: $\triangle OAP \sim \triangle ORQ$.

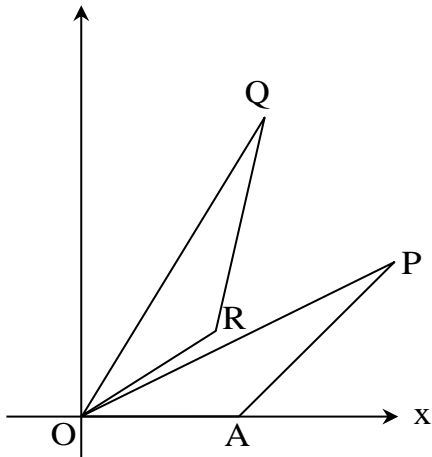
א. הראה כי המספר המרוכב z_R המיוצג על-ידי הקודקוד R מקיים:

$$z_R = \frac{z_Q}{z_P}$$

ב. מצא את z_R אם נתון בנוסף כי: $z_P = 2 + i$ ו- $z_Q = 1 + 2i$.

ג. חשב את הזווית $\angle QOR$.

ד. חשב את שטח המשולש $\triangle ORQ$.



חלק ב' – חדו"א ואלגברה של פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות, בעיות גדילה ודעיכה

4. במעבדה של מדען נשקלו בתאריך מסוים 200 גרם של חומר רדיואקטיבי א' ו-300 גרם של חומר רדיואקטיבי ב'. זמן מחצית החיים של חומר א' הוא 40 חודשים, וזמן מחצית החיים של חומר ב' הוא 20 חודשים.

א. (1) מצא כעבור כמה חודשים מתאריך השקילה משקל חומר א' יהיה $133\frac{1}{3}$ גרם.

(2) הראה כי רק ברגע בו משקל חומר א' הוא $133\frac{1}{3}$ גרם, משקלי שני החומרים יהיו זהים.

ב. (1) חשב באמצעות פתרון משוואה מעריכית כעבור כמה חודשים מהשקילה הראשונה כמות חומר א' הייתה גדולה ב-25 גרם מכמות חומר ב'. מצא את שתי האפשרויות.

(2) הראה כי גם בעזרת שימוש בזמן מחצית החיים של שני החומרים, ללא פתרון משוואה מעריכית, ניתן למצוא את שתי האפשרויות הנדרשות בסעיף ב'(1).

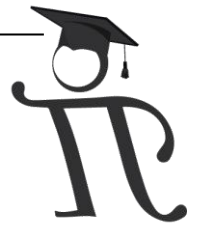
ג. הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ מתארות בהתאמה, את כמויות חומר א' וחומר ב' כעבור k חודשים, $0 \leq k \leq 120$.

(1) סרטט באותה מערכת צירים את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$. ציין ליד כל גרף איזו פונקציה הוא מתאר.

(2) מצא את ההפרש הגדול ביותר בין משקלי שני החומרים.

(3) נתונה מקבילית שאחת מצלעותיה משיקה לפונקציה $f(x)$, צלע אחרת משיקה לפונקציה $g(x)$, וצלע נוספת שלה מונחת על ציר ה- y . אחד מקודקודי המקבילית מונח על גרף הפונקציה $f(x)$.

חשב את שטח המקבילית.



המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

5. נתונה פונקציה $f(x)$ שהנגזרת שלה היא הפונקציה $f'(x) = \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$, פרמטר חיובי. תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא כמו תחום ההגדרה של $f'(x)$. היעזר ב- a במידת הצורך וענה על הסעיפים הבאים:

הוא כמו תחום ההגדרה של $f'(x)$. היעזר ב- a במידת הצורך וענה על הסעיפים הבאים:

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (אם יש כאלה).

(3) האם הפונקציה $f'(x)$ זוגית / אי-זוגית / או שאינה זוגית ואינה אי-זוגית? הוכח.

(4) מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ב. שרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ג. (1) מצא את שיעור ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

ד. נתונה פונקציה חדשה: $g(x) = \frac{a}{a^2 - x^2}$, בתחום $-a < x < a$.

(1) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$.

(2) השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x=0$ ו- $x=1$

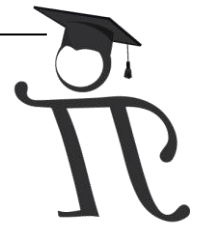
שווה ל- $\ln\sqrt{3}$. מצא את הערך של הפרמטר a .

ה. נתונה פונקציה $h(x)$ המקיימת: $h(x) = \frac{2}{-x^2 - 2x + 3}$. הפונקציה מוגדרת בתחום: $-2.5 \leq x \leq 0.5$.

השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $h(x)$, ציר ה- x ושני ישרים המאונכים לציר ה- x הוא $\ln\sqrt{3}$.

מצא את משוואות שני הישרים (מצא שתי אפשרויות). היעזר בסעיפים הקודמים במידת הצורך.

בהצלחה!



המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

תשובות סופיות

1. א. $A(\frac{2a}{m^2+1}, \frac{2am}{m^2+1})$, $B(\frac{3mb}{m^2+1}, \frac{3m^2b}{m^2+1})$ ב. $y = \frac{2a}{3b}x$ ג. $y = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}x$

2. א. $\overline{MG} = \frac{1}{6}u + \frac{1}{6}v - \frac{1}{2}w$, $\overline{MF} = \frac{1}{6}u - \frac{1}{3}v - \frac{1}{6}w$, $\overline{MQ} = \frac{7}{15}u - \frac{2}{15}v - w$ ב. הוכחה

ג. $7mx + my + 9z - 18m = 0$

3. א. הוכחה ב. $z_R = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$ ג. 26.565° ד. $\frac{1}{2}$

א(2). הוכחה

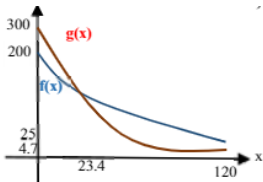
4. א(1). 23.398 חודשים

ב(2). הוכחה

ב(1). 40 חודשים, 103.398 חודשים

ג(3) 2113.26 יח"ר

ג(2) 100 גרם



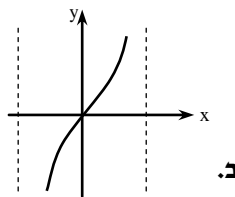
ג(1)

5. א(1) $-a < x < a$

א(2) עולה בתחום $-a < x < a$

א(3) אי-זוגית

א(4) $x = -a, x = a$



ב.

ג(1) $x = 0, \min$

ג(2) עלייה: $0 < x < a$, ירידה: $-a < x < 0$

ד(2) $a = 2$

ד(1) חיובית: $-a < x < a$, שלילית: אף x

ה. $x = -2, x = -1$ או $x = -1, x = 0$