

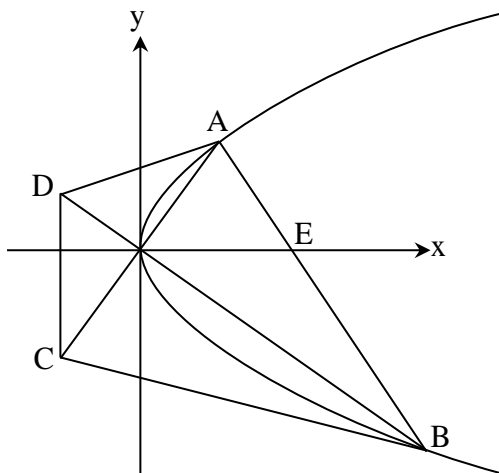
המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

מבחן מתכונת 1 – תשפ"א

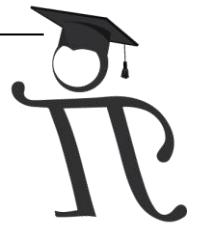
שאלון 035582

חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון (לא גרפי), דפי נוסחאות מצורפים.
 משך המבחן: שעתיים 50 דק'.
 מבנה השאלון: במבחן 5 שאלות, עליך לענות על 3 שאלות, לבחירתך.
 אם תענה על יותר מ-3 שאלות ייבדקו רק ה-3 השאלות הראשונות שבמחברתך!
 מפתח ההערכה: הניקוד על כל השאלות שווה. תשובות ללא דרך (חישוב/הסבר) לא תקבלנה ניקוד.
 שאלות המבחן מנוסחות בלשון זכר מטעמי נוחות, אך מופנות לבנות ולבנים כאחד.
 הבהרה: כאשר כתוב למצוא "נקודות" או "פתרונות" ברבים, ייתכן שתהיה תשובה אחת (או פחות)

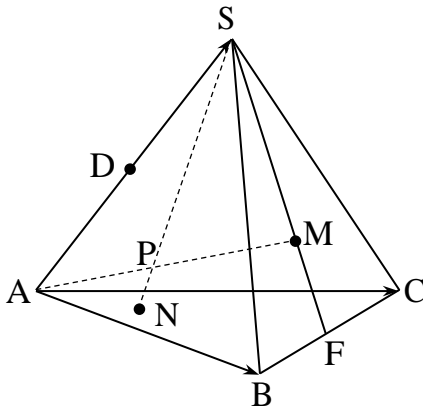
חלק א' – וקטורים, טריגונומטריה במרחב, גיאומטריה אנליטית ומספרים מרוכבים



1. נתון דלתון ABCD שאלכסוניו נחתכים בראשית הצירים O. פרבולה קנונית שמשוואתה היא: $y^2 = 2px$ ($p > 0$), עוברת דרך הנקודות A ו-B כמתואר בשרטוט. משוואת האלכסון AC היא $y = mx$. הצלע AB נחתכת עם ציר ה-x בנקודה E.
 - א. הבע באמצעות m את שיפוע הישר עליו מונחת הצלע AB.
 - ב. הבע באמצעות p את שיעורי הנקודה E.
 - ג. נתון בנוסף כי הצלע CD מונחת על הישר: $x = -p$.
 - (1) חשב את m.
 - (2) חשב את יחס שטחי המשולשים $S_{\triangle OEB} : S_{\triangle DOC}$.



המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה



2. נתונה פירמידה משולשת SABC.

נסמן: $\vec{AS} = \underline{w}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$. הנקודה D היא אמצע המקצוע AS והנקודה E (אינה בשרטוט) מקיימת: $\vec{SE} = t(\vec{SB} + \vec{SC})$.

א. מצא עבור איזה ערך של t, \overline{DE} מקביל למישור ABC.

SF הוא התיכון לצלע BC בפאה BSC. הנקודה M היא מפגש התיכונים בפאה זו.

ב. (1) הבע באמצעות \underline{u} , \underline{v} ו- \underline{w} את \overline{AM} .

(2) AM ו-SN נפגשים בנקודה P. הנקודה N

מקיימת: $\vec{SN} = \frac{1}{9}\underline{u} + \frac{1}{9}\underline{v} - \underline{w}$. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את AM ו-SN.

ג. הפירמידה SABC משורטטת במערכת צירים תלת-ממדית.

נתון: $A(1, -2, -1)$, $\underline{u} = (1, 0, 3)$, $\underline{v} = (0, 1, 6)$, $\underline{w} = (1, 1, 1)$.

מצא את משוואת המישור π_1 שבו נמצאת הפאה SBC.

3. נתונים שני מקומות גיאומטריים: הראשון הוא $|i \cdot z + 2| = 4$, והשני הוא $|z - a - bi| = 8$.

הישר ששיפועו 0.75 חותך את הקרן השלילית של ציר ה-y ומשיק לשני המקומות הגיאומטריים.

מרכז המקום הגיאומטרי השני נמצא על הישר $y = x - 18$.

א. מצא את שיעורי נקודת המרכז של המקום הגיאומטרי השני אם ידוע כי שיעוריה הם מספרים קטנים מ-25.

ב. הנקודות A ו-B נמצאות על המקומות הגיאומטריים הראשון והשני בהתאמה.

(1) מצא את האורך המקסימלי של הקטע AB

(2) מצא את המספרים המרוכבים המתוארים ע"י הנקודות A ו-B.

ג. המספר שמתאר את הנקודה A הוא פתרון המשוואה $z^3 = a + bi$. מצא את המשוואה.

ד. נתון המספר המרוכב: $z = 6 \cdot 0.5^{1-m} + 2^{2m} + 2i$.

מצא לאילו ערכי m המספר z יהיה בתוך המקום הגיאומטרי הראשון במישור גאוס.

המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

חלק ב' – חזו"א ואלגברה של פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות, בעיות גדילה ודעיכה

4. נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{-0.5x}(-x^4 + 8x^3)$.

- א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ב. (1) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ג. מצא את תחומי החיוביות של הפונקציה.
- ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. (1) נתונה הפונקציה $h(x)$. הראה כי מתקיים: $(h(x) \cdot e^{-x})' = e^{-x}(h'(x) - h(x))$.

(2) מצא את a עבורו ערך האינטגרל: $\int_0^a e^{-0.5x}(-x^4 + 8x^3) dx$ הינו מקסימלי, וחשב את ערך האינטגרל זה.

(היעזר בתת-סעיף ה(1)).

ו. מצא עבור אילו ערכי x_1 מתקיים: $f'(x_1) = [|f(x_1)|]'$.

5. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת, רציפה וגזירה לכל x .

משמאל נתון גרף הפונקציה $g(x) = \ln(f(x))$ המקיימת:
הפונקציה $g(x)$ קעורה כלפי מטה בכל חלקיה.
ענה על הסעיפים הבאים, במידת הצורך הבע באמצעות a, b, c, d, k .

$(a, b < 0, c, d, k > 0)$

- א. (1) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של $f(x)$.
- (2) עבור התחום $x > -1.5$, מצא את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.
- (3) מצא את התחום עבורו מתקיים: $f(x) < 1$.
- (4) מצא את נקודות הקיצון של $f(x)$ ואת סוגן.
- (5) שרטט גרף אפשרי של הפונקציה $f(x)$.

ב. נתון: $f''(c) = 4$. מצא את תחום הערכים האפשריים

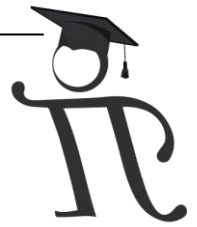
של שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = c$.

ג. בדיוק אחת מן ארבע הפונקציות הבאות היא הפונקציה $f(x)$. קבע איזו מהן היא $f(x)$. פרט את שיקוליך עבור כל אפשרות בנפרד.

(1) $f_1(x) = (2x + 3)(x - 1)^2$ (2) $f_2(x) = (2x + 3)^2(x - 1)^4$

(3) $f_3(x) = (-3 - 2x)(x - 1)^2$ (4) $f_4(x) = (\frac{2}{3}x + 1)(x - 1)^2$

בהצלחה!



המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

תשובות סופיות

ד. $\frac{8}{3}$

ג. $\sqrt{2}$

ב. $E(2p, 0)$

א. $\frac{m}{1-m^2}$

ב (2) $9:1, 3:7$

ב (1) $\overline{AM} = \frac{1}{3}u + \frac{1}{3}v + \frac{1}{3}w$

א. $\frac{1}{4}$

ג. $\pi_1: 5x + 2y + z - 8 = 0$

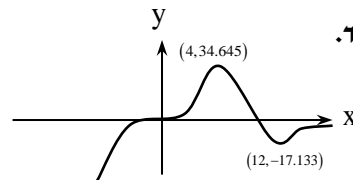
ד. $m < 0$

ג. $z^3 = -16 + 88i$

ב. $A = -4 + 2i, B = 28 + 2i, 32$

א. $(20, 2)$

א. $(0, 0), (8, 0)$ ב. $\max(4, 34.645), \min(12, -17.133)$ ג. עלייה: $x > 12, x < 4$, ירידה: $4 < x < 12$



חיובית: $0 < x < 8$

א. $0 \leq x_1 < 8, x_1 = 12$

ב (2) $a = 8, \frac{8192}{e^4} \approx 150.04$

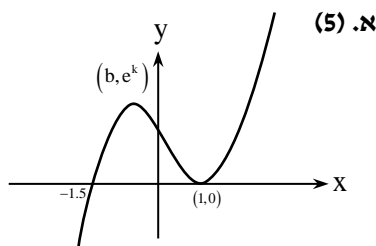
ה. (1) הוכחה

א. (1) חיוביות: $x > 1, -1.5 < x < 1$, שליליות: $x < -1.5$

א. (2) עלייה: $x > 1, -1.5 < x < b$, ירידה: $b < x < 1$

א. (3) $x < a, c < x < d$

א. (4) $\min(1, 0), \max(b, e^k)$



ג. $f_1(x)$

ב. $m < -2$