



המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר

התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

מבחן מתכונת 3 – תש"ף

שאלון 035581

חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון (לא גרפי), דפי נוסחאות מצורפים.

משך המבחן: שלוש שעות וחצי.

מבנה השאלון: במבחן 3 פרקים.

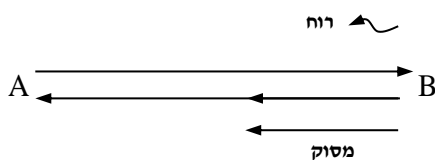
יש לענות על 5 שאלות מתוך 8. ניקוד על כל שאלה זהה.

מפתח ההערכה: הניקוד על כל השאלות שווה. תשובות ללא דרך (חישוב/הסבר) לא תקבלנה ניקוד.

שאלות המבחן מנוסחות בלשון זכר מטעמי נוחות, אך מופנות לבנות ולבנים כאחד.

הבהרה: כאשר כתוב למצוא "נקודות" או "פתרונות" ברבים, ייתכן שתהיה תשובה אחת (או פחות)

פרק א' – אלגברה ובעיות מילוליות, סדרות, הסתברות



1. מטוס קל יוצא מדי יום בשעה 6:00 ממקום A, טס נגד כיוון הרוח למקום B וחוזר מיד למקום A. באחד הימים המטוס הגיע חזרה לנקודה A בשעה 18:30. המהירות העצמית של המטוס בטיסה ללא רוח גדולה פי 5 ממהירות הרוח.

א. באיזו שעה הגיע המטוס למקום B?

ב. ביום סוער מהירות הרוח גדלה ב-30 קמ"ש. לו היה המטוס טס ביום סוער זה, זמן טיסתו מנקודה A לנקודה B וחזרה לנקודה A היה גדל בשעה אחת. מצא את המהירות העצמית של המטוס ואת מהירות הרוח ביום רגיל. באחד הימים הרגילים, יצא מסוק מנקודה B בשעה 12:00 וטס לעבר הנקודה A במסלול מקביל למסלול הטיסה של המטוס. המטוס חלף על פני המסוק בשעה 16:30.

ג. האם הייתה זו הפעם הראשונה בה המטוס חלף על פני המסוק? נמק.

ד. מצא את המהירות העצמית של המסוק.

2. סדרה מוגדרת על ידי כלל הנסיגה: $a_1 = 12$, $S_{n+1} = -\frac{1}{8}S_n + 12$

(S מייצגת את סדרת הסכומים החלקיים של הסדרה a_n)

א. הבע את a_n באמצעות S_n .

ב. הוכח שהסדרה a_n היא סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת, ומצא את מנתה.

ג. ירון טוען שקיים איבר בסדרה השווה ל: $\frac{1}{k}$, כך ש k הוא מספר שלם. האם ירון צודק, טועה, או שלא ניתן לדעת? נמק קביעתך.

ד. נתונה סדרה הנדסית אינסופית חדשה b_1, b_2, b_3, \dots שמנתה q מקיימת $\frac{1}{8} < |q| < 1$.

נתון כי מתקיים: $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots}$. מצא את q.

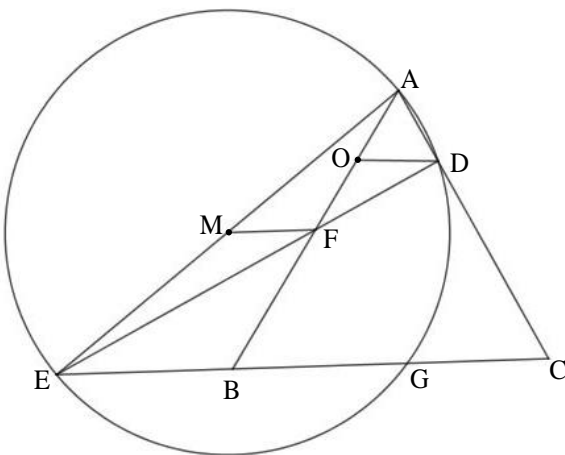
המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

3. בקופסה נמצאים 5 כדורים לבנים, 6 כדורים אדומים ו-7 קוביות שחלקן לבנות והיתר אדומות. מוציאים בזה אחר זה, ללא החזרה, שני פריטים מהקופסה.
א. מה ההסתברות שהוצאו שתי קוביות?

נתון כי ההסתברות שהוצאו שני פריטים השונים בצורתם ובצבעם היא $\frac{13}{51}$.

- ב. כמה קוביות לבנות וכמה קוביות אדומות בקופסה?
ג. ידוע שהוצאו שני פריטים השונים בצורתם וגם שונים בצבעם. מה ההסתברות שהפריט הראשון שהוצא היה כדור?
ד. במשחק מסויים משתתפים 6 שחקנים. כל אחד מבין המשתתפים מוציא בתורו מהקופסה בזה אחר זה, 2 פריטים ללא החזרה ולאחר מכן מחזירים לקופסה. ניסיון "מוצלח" הוא ניסיון שבו הוצאו 2 כדורים אדומים. לכל משתתף תור אחד בדיוק.
ה. מה ההסתברות שלכל היותר 4 מהמשתתפים, ולא פחות ממשתתף אחד, יבצעו ניסיון "מוצלח"?
ו. בסיבוב נוסף של המשחק הוגדר כי מנצח במשחק הוא השחקן הראשון שמבצע ניסיון "מוצלח". ניצחון במשחק מביא לסיום המשחק. מה ההסתברות שלא יגיע תורו של השחקן החמישי?

פרק ב' – גיאומטריה וטריגונומטריה במישור

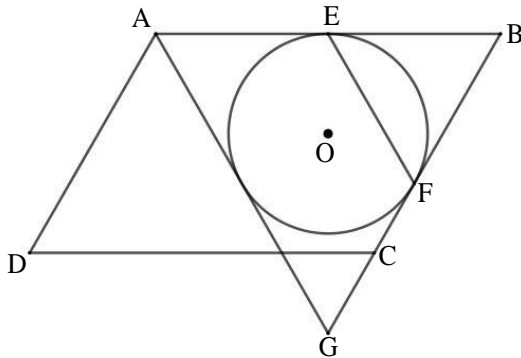


4. $\triangle ABC$ הוא משולש שווה צלעות. מנקודה E הנמצאת על המשך CB, מורידים אנך ED לצלע AC, החותך את AB בנקודה F. O הוא מרכז המעגל החוסם את המשולש $\triangle AFD$. M הוא מרכז המעגל החוסם את המשולש ADE. נתון: $BF = 2OD$, $BC = 2BE$.
א. חשב את היחס: $\frac{AD}{DC}$.
ב. הוכח: המרובע ODFM הוא מקבילית.
ג. הצלע EC חותכת את היקף המעגל החוסם את המשולש $\triangle ADE$ בנקודה G. הוכח: המשולש $\triangle MDG$ שווה צלעות.
ד. נתון כי שטח המרובע FDCB הוא 14 סמ"ר, חשב את שטח המשולש $\triangle MEF$.



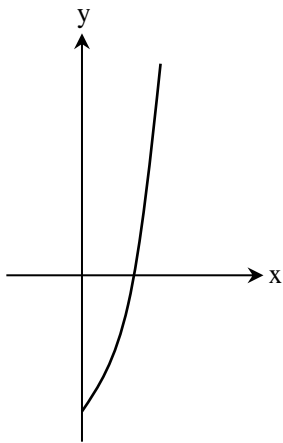
המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר

התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

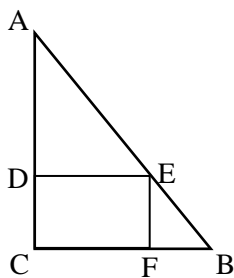


5. המרובע ABCD הוא מקבילית. המשך חוצה הזווית $\angle BAD$ חותך את המשך BC בנקודה G. המעגל O חסום במשולש ABG והוא משיק לצלעות AB ו- BG בנקודות E ו- F בהתאמה. נתון: $EF = b$.
 א. הבע באמצעות α ו- b את רדיוס המעגל O.
 ב. נתון בנוסף כי $AB = 2 \cdot EF$. חשב את α .

פרק ג' – חזו"א של פונקציות טריגונומטריות, פולינומים, רציונאליות ושורש ריבועי.



6. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 6x - 18}{x + 3}$
 בסרטוט מוצגת סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ עבור $x \geq 0$
 א. הראה כי מתקיים: $f(1) = 0$
 ב. מעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת החיתוך שלה עם חלקו החיובי של ציר ה- x. מצא את השטח המוגבל על-ידי הגרף של $f(x)$, על-ידי המשיק ועל-ידי ציר ה- y.
 ג. מצא תחומי עלייה וירידה של הפונקציה $f(x)$ עבור כל תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 ה. נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x) + a}$ (a פרמטר).
 האם מספר האסימפטוטות המקבילות לצירים שיש לפונקציה $g(x)$ תלוי ב- a? נמק קביעתך.



7. במשולש ישר זווית $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, חסום מלבן CDEF. שתי צלעות המלבן DC ו- CF מונחות על ניצבי המשולש והקודקוד E מונח על היתר של המשולש (ראה ציור). אורך הצלע EF הוא a ס"מ ואורך אלכסון המלבן הוא $a\sqrt{5}$ ס"מ. נסמן: $\angle B = \alpha$.
 א. הבע באמצעות a ו- α את שטח המעגל החוסם את המשולש ABC.
 ב. מצא את גודל הזווית α , שעבורה שטח המעגל הוא מינימלי.

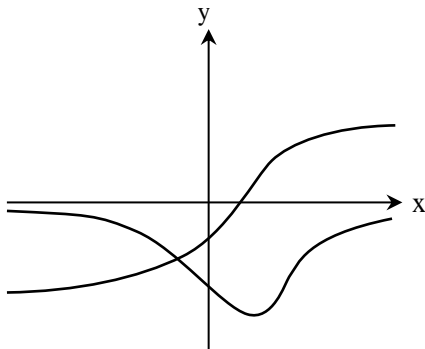


המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר

התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

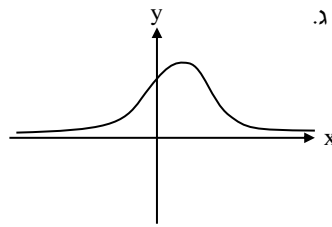
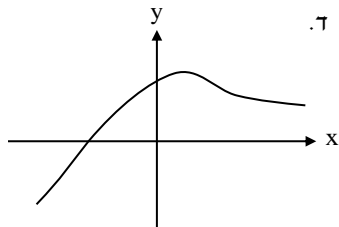
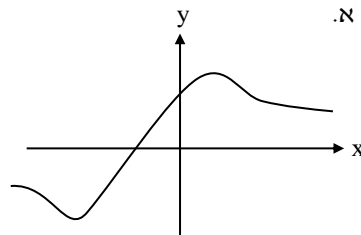
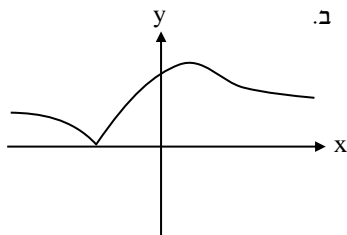
8. בשרטוט שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+2}} \quad \text{ו-} \quad g(x) = \frac{-5}{\sqrt{x^2-x+2}}$$



- א. (1) מצא את תחום ההגדרה שלכל אחת מהפונקציות.
 (2) מצא את שיעורי נקודת החיתוך של שתי הפונקציות.
 (3) מצא את נקודות החיתוך של כל אחת מן הפונקציות עם הצירים.
- ב. ישר המקביל לציר ה- y חותך את אחת הפונקציות בנקודה P ואת הפונקציה השניה בנקודה Q . מצא את שיעורי הנקודות P ו- Q עבורם אורך הקטע PQ הוא מקסימלי.

ג. (1) קבע אילו מהשרטוטים א-ד מתאר את אורך הקטע PQ כפונקציה של x . נמק.



(2) קבע האם ייתכן שאורך הקטע PQ הוא 2? נמק קביעתך.

ד. נתון שהקטע PQ הינו בעל אורך מקסימלי. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, הקטע PQ וישר המקביל לציר ה- x העובר בנקודת החיתוך של הפונקציות זו בזו.

בהצלחה!



המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר

התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

תשובות סופיות

1. א. 13:30 ב. מהירות הרוח היא 45 קמ"ש, ומהירות המטוס 225 קמ"ש ג. לא. ד. 135 קמ"ש

2. א. $a_n = 9S_n - 96$ ב. $-\frac{1}{8}$ ג. טועה ד. $q = \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}$

3. א. $\frac{7}{51}$ ב. 3 קוביות אדומות ו-4 קוביות לבנות

ג. $\frac{1}{2}$ ד. 0.4615 ה. 0.3381

4. א. $\frac{1}{3}$ ב. הוכחה ג. הוכחה ד. 2 סמ"ר

5. א. $\frac{b}{2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ ב. 60°

6. א. הוכחה ב. 1.5 יח' שטח ג. עלייה: $x < -3, x > -3$ ירידה: אף x ד.

ה. לא

7. א. $\frac{\pi a^2}{4} \left(\frac{2}{\cos \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha} \right)^2$ ב. 38.41°

8. א. (1) $f(x)$ כל x , $g(x)$ כל x . ב. $\left(-2, -\frac{5}{\sqrt{8}}\right)$ (2)

(3) $f(x)$: $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $g(x)$: $\left(0, -\frac{5}{\sqrt{2}}\right)$

ג. (1) גרף ב' (2) כן ד. $\frac{4\sqrt{14}}{5}$ יח' שטח ב. $(1.2, -3.34), (1.2, 0.935)$

